Predikátová logika—cvičení

1. Jsou následující formule tautologie?
   (a) $(\exists x Px) \vee (\exists x \neg Px)$
   (b) $\forall x(Px \vee \neg Px)$
   (c) $(\forall x Px) \wedge (\exists x \neg Px)$
2. Jsou formule z předchozí úlohy splnitelné? (Pokud ano, nakreslete nějaký jejich model. Nezapomeňte, že celé univerzum modelu je *neprázdné*.)
3. Negujte následující formule tak, aby byla negace pouze u atomických formulí.
   (a) $(\exists x Px) \vee (\exists x \neg Px)$
   (b) $\forall x \exists y(\neg(Px \vee Py) \rightarrow \exists z(R(x,z) \wedge R(y,z)))$
4. Napište negace následujících výroků.
   (a) Některé právní úkony trpí vadami.
   (b) Žádné procesní úkony nelze provádět na palubě lodi.
   (c) Někteří sportovci jsou nebezpeční svému okolí.
5. Zapište výroky (i jejich negace) z předchozí úlohy jako formule predikátové logiky.
6. Víme, že
   - Každá škodná událost je rozhodná událost.
   - Každá pojistná událost je škodná událost.

   Vyplývá pak některý z následujících výroků?
   (a) Některé rozhodné události jsou škodné události.
   (b) Některé škodné události jsou pojistné události.
   (c) Každá pojistná událost je rozhodná událost.
   (d) Všechny pojistné události jsou škodné události.
7. Kdybychom v předchozím příkladě předpokládali, že pojmy v rolích predikátů jsou neprázdné, které výroky by vyplývaly?

8. V jazyce máte binární predikát $P(x, y)$ ve smyslu *x je podřízen y*. Napište pomocí predikátové formule výrok

   - Někteří jsou někomu podřízeni a přitom sami nemají žádné podřízené.
   - Každý, kdo nemá žádné podřízené, je někomu podřízen.

9. Pro předchozí úlohu nakreslete dva modely s nejmenším možným počtem objektů, které jsou ke splnění jednotlivých výroků potřeba. (Objekty označte "kolečky", pojmenujte je $a, b, c, \ldots$ a vztah *a je podřízen b* naznačte pomocí šipky $a \to b$.)

10. Jsou splnitelné následující množiny formulí? (Symbol a je konstanta, která je v modelu vždy realizována.)

    (a) $\{\forall x(Q(x) \lor R(x)), \neg\exists x R(x), \neg Q(a)\}$

    (b) $\{\forall x(Q(x) \lor R(x)), \exists x R(x), \neg Q(a)\}$